

1

소인수분해

이야기로 여는 수학

- 1.0 무엇으로 구성되어 있을까?
- 1.1 소수와 합성수
- 1.2 소인수분해
- 1.3 최대공약수
- 1.4 최소공배수



이 단원에서 배울 소수는 자연수를 구성하는 기본 요소로서, 현대 사회에서 개인 정보 보호를 위해 암호를 만드는 데도 사용되는 매우 중요한 수이다.

인류는 수천 년 전부터 소수를 연구해 왔으며, 고대 그리스의 수학자 유클리드(Euclid, B.C. 325?~B.C. 265?)는 그의 저서 『원론(Elements)』에서 소수가 무한히 많다는 것을 보였다. 그 후로 가우스(Gauss, K. F., 1777~1855)와 리만(Riemann, G. F. B., 1826~1866)을 비롯한 많은 수학자가 소수를 연구하여 큰 업적을 남겼다.

이 단원에서는 자연수를 소수의 곱으로 나타내는 소인수분해와 소인수분해를 이용하여 최대공약수, 최소공배수를 구하는 방법을 배운다.

[출처: H. Eves(이우영 · 신항균 역), 『수학사』]



준비해 볼까?

1 다음 수의 약수를 모두 구하시오.

- (1) 7 (2) 12 (3) 16 (4) 36

2 다음 수의 배수를 구하시오.

- (1) 2 (2) 6 (3) 10 (4) 13

3 다음 두 수의 최대공약수를 구하시오.

- (1) 6, 8 (2) 12, 15
(3) 24, 28 (4) 30, 36

4 다음 두 수의 최소공배수를 구하시오.

- (1) 4, 6 (2) 10, 12
(3) 20, 28 (4) 30, 42

1.0

무엇으로 구성되어 있을까?

‘이 세상은 무엇으로 구성되어 있을까?’ 이 질문은 고대로부터 지금까지 이어져 온 철학과 과학의 근본적인 질문 중의 하나였습니다.

고대 그리스의 철학자인 엠페도클레스(Empedocles, B.C. 490?~B.C. 430?)는 불, 물, 공기, 흙의 4가지 요소가 결합하여 모든 물질이 만들어진다고 주장하였습니다. 그러나 오늘날에는 모든 물질이 수소, 산소, 질소, 탄소 등의 원소들로 이루어져 있음이 밝혀졌습니다. 원소는 물질을 이루는 기본적인 구성 요소로서 현재까지 발견된 원소는 모두 118개입니다.



한편, 우리가 의사소통하는데 사용되는 한글은 조선의 제4대 임금 세종이 ‘훈민정음’이라는 이름으로 창제하여 1446년에 반포한 문자로서 현재는 자음 14개와 모음 10개로 구성되어 있습니다. 예를 들어 ‘수학’은 자음인 ‘ㅅ’, ‘ㅎ’, ‘ㄱ’과 모음인 ‘ㅜ’, ‘ㅓ’가 결합하여 만들어진 글자입니다.

이와 같이 우리 주변에서는 몇 가지 요소가 결합하여 이루어진 것들을 쉽게 찾아볼 수 있습니다.

[출처: 제임스 E. 매클렐란 3세 · 해럴드 도른(전대호 역), 『과학과 기술로 본 세계사 강의』]

- 영문자는 각각 몇 개의 자음과 모음으로 이루어져 있는지 알아보고, ‘mathematics’를 이루고 있는 자음과 모음을 찾아 말해 보자.

태도 및 실천

- 우리 주변에서 몇 가지 요소가 결합하여 이루어진 것의 예를 찾아 말해 보자.

수학

mathematics

1.1

소수와 합성수

학 | 습 | 목 | 표

- 소수와 합성수의 뜻을 안다.
- 자연수 중에서 소수를 찾을 수 있다.

학 | 습 | 요 | 소

- 소수, 합성수



자연수의 분류

다음을 보고, 약수의 개수에 따라 자연수를 분류하는 방법을 생각해 봅시다.



활동 1 1부터 9까지의 자연수를 각각 두 자연수의 곱으로 나타내어 약수를 모두 구하려고 한다. 다음 표를 완성해 보자.

초등 배웠어요!

약수

어떤 수를 나누어떨어지게 하는 수

자연수	1	2	3	4	5	6	7	8	9
두 수의 곱	1×1	1×2		1×4 , 2×2					
약수	1	1, 2		1, 2, 4					
약수의 개수(개)	1	2		3					

생각 1

소수(素數)와 소수(小數)는 글자의 음은 같지만 뜻이 다르다. 즉, 2, 3, 5, ...와 같은 수가 소수(素數)이고, 0.1, 0.25, 7.23, ...과 같은 수가 소수(小數)이다.

약수의 개수에 따라 자연수를 어떻게 분류할 수 있나요?

생각 열기에서 자연수 2, 3, 5, 7과 같이 약수가 2개인 수, 즉 1보다 큰 자연수 중에서 1과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수를 **소수**라고 한다.

또, 자연수 4, 6, 8, 9와 같이 약수가 3개 이상인 수, 즉 1보다 큰 자연수 중에서 1과 그 수 자신 이외에 또 다른 수를 약수로 가지는 수를 **합성수**라고 한다.

| 참고 | 1은 소수도 아니고, 합성수도 아니다.

- 예** (1) 11은 약수로 1, 11만을 가지므로 소수이다.
 (2) 10은 약수로 1, 10 이외에 2, 5를 가지므로 합성수이다.

문제 1 다음 수를 소수와 합성수로 구분하시오.

- (1) 14 (2) 17 (3) 19 (4) 21

생각 2

자연수 중에서 소수를 어떻게 찾을 수 있나요?

짝수인 소수는 2뿐이다.

2의 배수 중 2를 제외한 수는 $2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 4, \dots$ 와 같이 나타낼 수 있다. 이 수들은 모두 1과 그 수 자신 이외에 2를 약수로 가지므로 합성수이다. 마찬가지로 3의 배수 중 3을 제외한 수도 모두 합성수이다.

일반적으로 소수의 배수 중 그 소수를 제외한 수는 모두 합성수이다.

이 원리를 이용하여 1부터 50까지의 자연수 중에서 소수를 다음과 같은 방법으로 찾을 수 있다.

오른쪽과 같이 소수를 찾는 방법은 고대 그리스의 수학자 에라토스테네스(Eratosthenes, B.C. 275~B.C. 194?)가 고안한 것으로 마치 체로 소수를 골라내는 것처럼 보인다고 하여 이 방법을 '에라토스테네스의 체'라고 한다.

- ① 1은 소수가 아니므로 지운다.
- ② 남은 수 중 가장 작은 수인 2에 ○표를 하고, 2보다 큰 2의 배수를 모두 지운다.
- ③ 남은 수 중 가장 작은 수인 3에 ○표를 하고, 3보다 큰 3의 배수를 모두 지운다.
- ④ 남은 수 중 가장 작은 수인 5에 ○표를 하고, 5보다 큰 5의 배수를 모두 지운다.
- ⑤ 남은 수 중 가장 작은 수인 7에 ○표를 하고, 7보다 큰 7의 배수를 모두 지운다.
- ⑥ 이처럼 남은 수 중 가장 작은 수에 ○표를 하고, 그 수보다 큰 그 수의 배수를 모두 지우는 작업을 반복한다.

이와 같이 하면

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

과 같은 소수만 남게 된다.

1	②	③	4	⑤	6	⑦	8	9	10
⑪	12	⑬	14	15	16	⑰	18	⑲	20
21	22	⑳	24	25	26	27	28	㉑	30
㉓	32	33	34	35	36	㉗	38	39	40
㉙	42	㉛	44	45	46	㉝	48	49	50

문제 2

앞과 같은 방법으로 1부터 100까지의 자연수 중에서 소수를 모두 찾으시오.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

생각을 나누는 의사소통

나와 관련이 있는 수를 찾아 보고, 그 수가 소수인지 합성수인지 친구와 이야기해 보자.

동료 평가

- 친구가 적절한 예를 들었는가?
- 친구가 찾은 수가 소수나 합성수로 올바른가?

내 생일은 7월 23일이야.
두 수 7과 23은
모두 소수야.

우리 반 학생 수는
27명이야.
27은 소수일까?



창의+

수학 집 짓기





스스로 해결하기

1



다음 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

- (1) 1보다 큰 자연수 중에서 1과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수를 라고 한다.
- (2) 1보다 큰 자연수 중에서 1과 그 수 자신 이외에 또 다른 수를 약수로 가지는 수를 라고 한다.

2



다음 수를 소수와 합성수로 구분하시오.

- (1) 13 (2) 16 (3) 25 (4) 29

3



다음 표에서 주어진 수가 소수이면 ○표, 합성수이면 ×표를 하시오.

수	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
○/×										

4



20보다 작은 자연수 중에서 가장 큰 소수와 가장 작은 합성수의 합을 구하시오.

5



다음 설명이 옳으면 ○표, 틀리면 ×표를 하시오.

- (1) 가장 작은 소수는 1이다. ()
- (2) 2보다 큰 짝수는 소수가 아니다. ()
- (3) 두 홀수의 곱은 합성수이다. ()

6

과정을 다지는 문제



다음 두 조건을 만족시키는 자연수를 모두 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

- (가) 20 이하의 자연수이다.
- (나) 7로 나누면 몫과 나머지가 모두 소수이다.

수학 이야기

쌍둥이 소수

3과 5, 5와 7, 11과 13은 두 수의 차가 2인 소수이다. 이와 같은 소수를 '쌍둥이 소수'라고 한다. 쌍둥이 소수는 얼마나 많을까? 많은 사람들이 큰 쌍둥이 소수를 찾기 시작하여 2016년에는 무려 388342자리의 쌍둥이 소수가 발견되었다. 그러나 쌍둥이 소수가 얼마나 많은지는 모르며 수학자들은 쌍둥이 소수가 무한히 많을 것이라고 추측하고 이를 밝히기 위해서 많은 노력을 기울이고 있다.

[출처: 프라임 그리드, 2016]



1.2

소인수분해

학 | 습 | 목 | 표

• 소인수분해의 뜻을 알고, 자연수를 소인수분해할 수 있다.

학 | 습 | 요 | 소

• 거듭제곱, 밑, 지수, 소인수, 소인수분해



쌀 한 톨과 소녀

다음 『쌀 한 톨』이라는 책에 있는 이야기를 보고, 왕이 소녀에게 주어야 할 쌀의 양을 생각해 봅시다.

옛날 인도의 어느 왕에게 운반되던 쌀 포대에 구멍이 나서 쌀이 새자 한 소녀가 치마폭에 쌀을 담아 왕에게 돌려주었고, 이에 감격한 왕은 소녀에게 한 가지 소원을 들어주기로 하였다. 소녀는 “첫째 날은 쌀 1톨, 둘째 날은 쌀 2톨, 셋째 날은 쌀 4톨, …, 이렇게 하여 30일 동안 하루 전에 받은 쌀알의 두 배를 주십시오.”라고 청하였다.

[출처: Demi(이향순 역), 『쌀 한 톨』]



활동 1 소녀가 위와 같이 쌀을 받을 때, 다섯째 날과 열째 날에 받을 쌀알은 각각 몇 톨인지 구해 보자.

생각 1

같은 수를 여러 번 곱할 때, 이를 어떻게 간단히 나타낼 수 있나요?

생각 열기에서 소녀가 받을 쌀의 양은 다음 표와 같다.

날	첫째 날	둘째 날	셋째 날	넷째 날	다섯째 날	...
쌀의 양(톨)	1	2	2×2	$2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2 \times 2$...

이와 같이 2를 여러 번 곱할 때에는 각각

$$2 \times 2 = 2^2$$

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$$

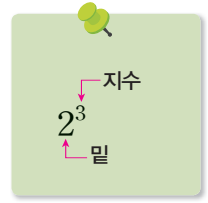
⋮

으로 나타내고, 2^2 , 2^3 , 2^4 , ...을 각각 2의 제곱, 2의 세제곱, 2의 네제곱, ...이라고 읽는다.

4개
 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

$2^1=2$ 로 정한다.

이때 $2^2, 2^3, 2^4, \dots$ 을 통틀어 2의 **거듭제곱**이라 하고, 곱하는 수 2를 거듭제곱의 **밑**, 곱하는 개수를 나타낸 수 2, 3, 4, \dots 를 거듭제곱의 **지수**라고 한다.



예 (1) 5^3 에서 밑은 5, 지수는 3이다.

(2) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 은 2의 거듭제곱과 3의 거듭제곱을 함께 사용하여 나타낼 수 있다. 즉,
 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

문제 1 다음을 거듭제곱을 사용하여 나타내시오.

(1) $3 \times 3 \times 3 \times 3$

(2) $5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

생각 2

자연수를 소수들만의 곱으로 나타낼 수 있나요?

12를 두 자연수의 곱으로 나타내면

$$12 = 1 \times 12, 12 = 2 \times 6, 12 = 3 \times 4$$

인수는 약수와 같은 뜻으로 쓰인다.

이므로 1, 2, 3, 4, 6, 12는 모두 12의 약수이다. 이 약수들을 12의 인수라고도 한다. 특히, 2, 3은 소수이면서 12의 인수이다.

이와 같이 어떤 자연수의 소수인 인수를 **소인수**라고 한다.

예 10의 인수는 1, 2, 5, 10이고, 이 중에서 2, 5는 소수이므로 10의 소인수는 2, 5이다.

문제 2 다음 수의 소인수를 모두 구하시오.

(1) 9

(2) 11

(3) 21

(4) 30

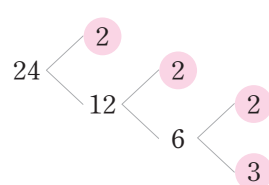
12는 $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$ 과 같이 소인수들만의 곱으로 나타낼 수 있다.

이와 같이 1보다 큰 자연수를 소인수들만의 곱으로 나타내는 것을 **소인수분해**한다고 한다.

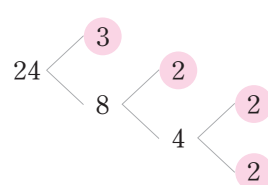
$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$$

$$\rightarrow 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ = 2^3 \times 3$$

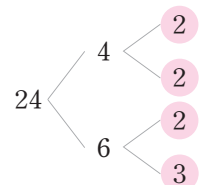
24는 다음과 같이 여러 가지 방법으로 소인수분해할 수 있다.



$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ = 2^3 \times 3$$



$$24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \\ = 2^3 \times 3$$



$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ = 2^3 \times 3$$

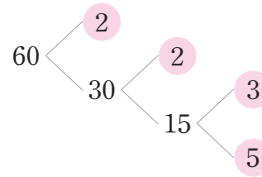
소인수분해한 결과는 보통 작은 소인수부터 차례로 쓰고, 같은 소인수의 곱은 거듭제곱으로 나타낸다.

앞에서 24는 어떤 순서로 소인수분해하여도 그 결과는 모두 $2^3 \times 3$ 임을 알 수 있다.
일반적으로 1보다 큰 자연수를 소인수분해한 결과는 소인수를 곱하는 순서를 생각하지 않으면 오직 한 가지뿐이다.

예제 1

60을 소인수분해하시오.

풀이 | $60 = 2 \times 30$
 $= 2 \times 2 \times 15$
 $= 2 \times 2 \times 3 \times 5$
 $= 2^2 \times 3 \times 5$



$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 60} \\ 2 \overline{) 30} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \end{array}$$

답 $2^2 \times 3 \times 5$

문제 3

다음 수를 소인수분해하시오.

(1) 27

(2) 42

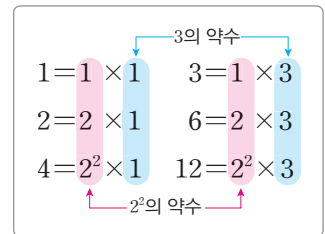
(3) 56

(4) 120

소인수분해를 이용하여 자연수의 약수를 구할 수 있다.

예를 들어 12를 소인수분해한 결과가 $2^2 \times 3$ 이고, 12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12로 오른쪽과 같이 2^2 의 약수 1, 2, 2^2 과 3의 약수 1, 3 중에서 각각 하나씩 골라서 곱한 것임을 알 수 있다.

따라서 12의 약수는 다음과 같이 구할 수 있다.



2^2 의 약수	3의 약수	12의 약수
1	1	$1 \times 1 = 1$
	3	$1 \times 3 = 3$
2	1	$2 \times 1 = 2$
	3	$2 \times 3 = 6$
2^2	1	$2^2 \times 1 = 4$
	3	$2^2 \times 3 = 12$

2^2 의 약수 \ 3의 약수	1	3
1	$1 \times 1 = 1$	$1 \times 3 = 3$
2	$2 \times 1 = 2$	$2 \times 3 = 6$
2^2	$2^2 \times 1 = 4$	$2^2 \times 3 = 12$

문제 4

소인수분해를 이용하여 다음 수의 약수를 모두 구하시오.

(1) 3×11

(2) $2^2 \times 13$

(3) 54

(4) 100

생각을 나누는 의사소통

소인수분해를 이용하여 약수를 구하면 어떤 점이 좋은지 모듈별로 이야기해 보자.

모듈 간 평가

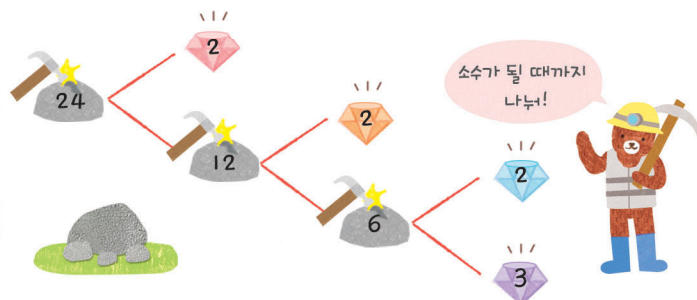
- 친구들이 좋은 점을 설득력 있게 이야기하였는가?
- 친구들이 우리 모듈의 설명을 잘 경청하였는가?



수학 집 짓기

24의 소인수분해

$$\begin{aligned} 24 &= 2 \times 12 \\ &= 2 \times 2 \times 6 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ &= 2^3 \times 3 \end{aligned}$$







소인수가 3개 이상인 수의 약수 구하기

소인수가 3개 이상일 때, 소인수분해를 이용하여 약수를 구할 수 있다.

예를 들어 60의 약수를 소인수분해를 이용하여 구해 보자.

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 이므로 60의 소인수는 2, 3, 5로 3개이다. 이때 2^2 의 약수는 1, 2, 2^2 이고, 3의 약수는 1, 3이며, 5의 약수는 1, 5이므로 60의 약수는 2^2 의 약수, 3의 약수, 5의 약수 중에서 각각 하나씩 골라 서로 곱하여 다음과 같이 구할 수 있다.

2^2 의 약수	3의 약수	5의 약수	60의 약수
1	1	1	$1 \times 1 \times 1 = 1$
	3	5	$1 \times 1 \times 5 = 5$
2	1	1	$1 \times 3 \times 1 = 3$
	3	5	$1 \times 3 \times 5 = 15$
2^2	1	1	$2 \times 1 \times 1 = 2$
	3	5	$2 \times 1 \times 5 = 10$
	1	1	$2 \times 3 \times 1 = 6$
	3	5	$2 \times 3 \times 5 = 30$
	1	1	$2^2 \times 1 \times 1 = 4$
	3	5	$2^2 \times 1 \times 5 = 20$
	1	1	$2^2 \times 3 \times 1 = 12$
	3	5	$2^2 \times 3 \times 5 = 60$

따라서 60의 약수를 작은 것부터 나열하면 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60이다.

확인

소인수분해를 이용하여 다음 수의 약수를 모두 구하시오.

(1) 126

(2) 210



1.3

최대공약수

학 | 습 | 목 | 표

• 최대공약수의 성질을 이해하고, 이를 구할 수 있다.

학 | 습 | 요 | 소

• 서로소



타일 미술 작품

수학 + 미술

하경이네 반 학생들은 학교 담장에 각자 꾸민 타일을 붙여 가로 길이 135 cm, 세로 길이 75 cm인 직사각형 모양의 협동 작품을 만들려고 합니다. 이 협동 작품은 크기가 같고 한 변의 길이가 자연수인 정사각형 모양의 타일을 빈틈없이 이어 붙여서 만든다고 할 때, 어떤 크기의 타일을 붙여야 할지 생각해 봅시다.



활동 1 한 변의 길이가 3 cm인 타일로 위의 협동 작품을 만들 수 있는지 말해 보자.

활동 2 한 변의 길이가 9 cm인 타일로 위의 협동 작품을 만들 수 있는지 말해 보자.

생각 1

정사각형 모양의 타일의 한 변의 길이는 얼마인가요?

생각 열기에서 정사각형 모양의 타일을 가로 방향으로 일렬로 이어 붙였을 때, 가로의 길이가 135 cm가 될 수 있는 타일의 한 변의 길이는 135의 약수인

1, 3, 5, 9, 15, 27, 45, 135 cm

이고, 정사각형 모양의 타일을 세로 방향으로 일렬로 이어 붙였을 때, 세로의 길이가 75 cm가 될 수 있는 타일의 한 변의 길이는 75의 약수인

1, 3, 5, 15, 25, 75 cm

이다. 따라서 가로의 길이가 135 cm, 세로의 길이가 75 cm인 직사각형 모양의 협동 작품을 만들 수 있는 정사각형 모양의 타일의 한 변의 길이는 135와 75의 공약수인 1, 3, 5, 15 cm이고, 가장 큰 정사각형 모양의 타일의 한 변의 길이는 135와 75의 최대공약수인 15 cm이다.

이때 135와 75의 공약수 1, 3, 5, 15는 최대공약수 15의 약수임을 알 수 있다.

두 개 이상의 자연수의 공통인 약수를 공약수라 하고, 공약수 중에서 가장 큰 수를 최대공약수라고 한다.

4의 약수: 1, 2, 4
7의 약수: 1, 7

한편, 두 수 4와 7의 최대공약수는 1이다. 이와 같이 최대공약수가 1인 두 자연수를 **서로소**라고 한다.

문제 1

다음 중에서 주어진 두 수가 서로소인 것을 모두 찾으시오.

- (1) 4, 9 (2) 7, 11 (3) 12, 15 (4) 16, 21

생각 2

소인수분해를 이용하여 최대공약수를 구할 수 있나요?

두 수 24와 36을 각각 소인수분해하면 $24=2^3 \times 3$ 과 $36=2^2 \times 3^2$ 이고, 이를 이용하여 24와 36의 약수를 각각 구하면 다음 표와 같다.

초등 배웠어요!

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 24 \ 36} \\ 2 \overline{) 12 \ 18} \\ 3 \overline{) 6 \ 9} \\ \quad 2 \ 3 \end{array}$$

$2 \times 2 \times 3 = 12$
: 24와 36의 최대공약수

24(=2 ³ ×3)의 약수			36(=2 ² ×3 ²)의 약수			
×	1	3	×	1	3	3 ²
1	1	3	1	1	3	3 ²
2	2	2×3	2	2	2×3	2×3 ²
2 ²	2 ²	2 ² ×3	2 ²	2 ²	2 ² ×3	2 ² ×3 ²
2 ³	2 ³	2 ³ ×3				

위의 표에서 색칠된 수들은 24와 36의 공약수이고, 이 중에서 가장 큰 수인 $2^2 \times 3$ 은 24와 36의 최대공약수이다. 또한, 24와 36의 공약수는 최대공약수 $2^2 \times 3$ 의 약수이다.

이때 24와 36의 최대공약수 $2^2 \times 3$ 은 두 수를 각각 소인수분해한 결과인 $2^3 \times 3$ 과 $2^2 \times 3^2$ 에서 공통인 소인수 2의 거듭제곱 중 지수가 작은 2^2 과 공통인 소인수 3의 거듭제곱 중 지수가 작은 3을 곱한 $2^2 \times 3 = 12$ 이다.

$$\begin{array}{r} 24=2^3 \times 3 \\ 36=2^2 \times 3^2 \\ \hline 2^2 \times 3 = 12 \\ \text{최대공약수} \end{array}$$

일반적으로 두 자연수의 최대공약수는 두 수를 각각 소인수분해하여 거듭제곱으로 나타낸 후 공통인 소인수의 거듭제곱에서 지수가 같으면 그대로, 다르면 지수가 작은 것을 택하여 모두 곱한 것과 같다. 또한, 두 자연수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이다.

$$\begin{array}{r} 40=2 \times 2 \times 2 \times 5 \\ 60=2 \times 2 \times 3 \times 5 \\ \hline 2 \times 2 \times 5 = 20 \\ \text{최대공약수} \end{array}$$

예 40과 60의 최대공약수는 2^2 과 5를 곱한 $2^2 \times 5 = 20$ 이다.

$$\begin{array}{r} 40=2^3 \times 5 \\ 60=2^2 \times 3 \times 5 \\ \hline 2^2 \times 5 = 20 \\ \text{최대공약수} \end{array}$$

문제 2

다음 두 수의 최대공약수를 구하시오.

- (1) $2^3 \times 5^2$, $2^2 \times 5^3$ (2) $2^2 \times 7^2$, $2^2 \times 3 \times 7$
(3) 48, 60 (4) 84, 90

세 자연수의 최대공약수도 두 자연수일 때와 같은 방법으로 구할 수 있다.

예제 1

소인수분해를 이용하여 세 수 30, 72, 90의 최대공약수를 구하시오.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 30 \ 72 \ 90} \\ 3 \overline{) 15 \ 36 \ 45} \\ \hline 5 \ 12 \ 15 \end{array}$$

풀이 | 세 수 30, 72, 90을 각각 소인수분해하면 오른쪽과 같다.
따라서 세 수 30, 72, 90의 최대공약수는 $2 \times 3 = 6$ 이다.

$$\begin{array}{l} 30 = 2 \times 3 \times 5 \\ 72 = 2^3 \times 3^2 \\ 90 = 2 \times 3^2 \times 5 \\ \hline 2 \times 3 \end{array}$$

답 6

문제 3 다음 세 수의 최대공약수를 구하시오.

(1) $2^2 \times 3^3$, $2^2 \times 3 \times 5$, $2^3 \times 3^2 \times 7$

(2) $2 \times 5^2 \times 7^3$, $2^2 \times 5 \times 7^2$, $2^3 \times 5 \times 7$

(3) 36, 42, 52

(4) 72, 84, 180

문제 4 초콜릿 30개와 사탕 45개를 학생들에게 남김없이 나누어 주려고 한다.
각 학생이 받는 초콜릿의 수와 사탕의 수가 각각 같을 때, 최대
몇 명에게 나누어 줄 수 있는지 구하시오.



수학 집 짓기



24와 60의 최대공약수

$24 = 2^3 \times 3$
 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

공통이 아닌 소인수는
생각하지 않음

최대공약수: $2^2 \times 3 = 12$

지수가 다르면 작은 것 지수가 같으면 그대로

공통 부분만 곱해!

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$
 $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$



1.4

최소공배수

학 | 습 | 목 | 표

• 최소공배수의 성질을 이해하고, 이를 구할 수 있다.



동시에 시작하는 오르골

수학 + 음악

오르골(orgel)은 자동으로 음악을 연주하는 악기입니다. 오르골 A는 3분 길이의 곡을, 오르골 B는 4분 길이의 곡을 반복하여 연주한다고 할 때, 두 오르골이 동시에 연주를 시작한 지 몇 분 후에 다시 동시에 연주를 시작하는지 생각해 봅시다.



활동 1 두 오르골 A, B가 동시에 연주를 시작한 지 12분 후에 다시 동시에 연주를 시작하는지 말해 보자.

활동 2 두 오르골 A, B가 동시에 연주를 시작한 지 18분 후에 다시 동시에 연주를 시작하는지 말해 보자.

생각 1

두 오르골이 다시 동시에 연주를 시작하는 것은 언제인가요?

생각 열기에서 오르골 A가 다시 연주를 시작하는 것은 3의 배수인

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ...

분 후이고, 오르골 B가 다시 연주를 시작하는 것은 4의 배수인

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, ...

두 개 이상의 자연수의 공통인 배수를 공배수라 하고, 공배수 중에서 가장 작은 수를 최소공배수라고 한다.

분 후이다. 따라서 두 오르골이 다시 동시에 연주를 시작하는 것은 3과 4의 공배수인 12, 24, 36, ...분 후이고, 처음으로 다시 동시에 연주를 시작하는 것은 3과 4의 최소공배수인 12분 후이다.

이때 3과 4의 공배수 12, 24, 36, ...은 최소공배수 12의 배수임을 알 수 있다.

문제 1

다음에서 8과 12의 공배수인 것을 모두 찾으시오.

(1) 18

(2) 24

(3) 36

(4) 48

생각 2

초등 배웠어요!

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 8 \ 12} \\ 2 \overline{) 4 \ 6} \\ \underline{2 \ 3} \\ 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24 \\ \text{: 8과 12의 최소공배수} \end{array}$$

소인수분해를 이용하여 최소공배수를 구할 수 있나요?

두 수 8과 12를 각각 소인수분해하면 $8=2^3$ 과 $12=2^2 \times 3$ 이고, 이를 이용하여 8과 12의 배수를 각각 구하면 다음 표와 같다.

\times	1	2	3	4	5	6	...
8($=2^3$)의 배수	2^3	2^4	$2^3 \times 3$	2^5	$2^3 \times 5$	$2^4 \times 3$...
12($=2^2 \times 3$)의 배수	$2^2 \times 3$	$2^3 \times 3$	$2^2 \times 3^2$	$2^4 \times 3$	$2^2 \times 3 \times 5$	$2^3 \times 3^2$...

위의 표에서 색칠된 수들은 8과 12의 공배수이고, 이 중에서 가장 작은 수인 $2^3 \times 3$ 은 8과 12의 최소공배수이다. 또한, 8과 12의 공배수는 최소공배수 $2^3 \times 3$ 의 배수이다.

이때 8과 12의 최소공배수 $2^3 \times 3$ 은 두 수를 각각 소인수분해한 결과인 2^3 과 $2^2 \times 3$ 에서 공통인 소인수 2의 거듭제곱 중 지수가 큰 2^3 과 공통이 아닌 소인수 3을 곱한 $2^3 \times 3=24$ 이다.

일반적으로 두 자연수의 최소공배수는 두 수를 각각 소인수분해하여 거듭제곱으로 나타낸 후 공통인 소인수의 거듭제곱에서 지수가 같으면 그대로, 다르면 지수가 큰 것을 택하고, 공통이 아닌 소인수의 거듭제곱은 그대로 택하여 모두 곱한 것과 같다. 또한, 두 자연수의 공배수는 두 수의 최소공배수의 배수이다.

$$\begin{array}{r} 8=2^3 \\ 12=2^2 \times 3 \\ \hline 2^3 \times 3 = 24 \\ \text{최소공배수} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24=2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ 30=2 \times 3 \times 5 \\ \hline 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120 \\ \text{최소공배수} \end{array}$$

예 24와 30의 최소공배수는 $2^3, 3, 5$ 를 모두 곱한 $2^3 \times 3 \times 5=120$ 이다.

$$\begin{array}{r} 24=2^3 \times 3 \\ 30=2 \times 3 \times 5 \\ \hline 2^3 \times 3 \times 5 = 120 \\ \text{최소공배수} \end{array}$$

문제 2

다음 두 수의 최소공배수를 구하시오.

- (1) $2^2 \times 3, 2 \times 3^3$ (2) $2^3 \times 5, 2 \times 3^2 \times 5$
(3) 8, 11 (4) 16, 40

세 자연수의 최소공배수도 두 자연수일 때와 같은 방법으로 구할 수 있다.

예제 1

소인수분해를 이용하여 세 수 12, 30, 40의 최소공배수를 구하시오.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 12 \ 30 \ 40} \\ 2 \overline{) 6 \ 15 \ 20} \\ 3 \overline{) 3 \ 15 \ 10} \\ 5 \overline{) 1 \ 5 \ 10} \\ \underline{1 \ 1 \ 2} \end{array}$$

풀이 세 수 12, 30, 40을 각각 소인수분해하면 오른쪽과 같다.
따라서 세 수 12, 30, 40의 최소공배수는 $2^3 \times 3 \times 5=120$ 이다.

$$\begin{array}{r} 12=2^2 \times 3 \\ 30=2 \times 3 \times 5 \\ 40=2^3 \times 5 \\ \hline 2^3 \times 3 \times 5 \\ \text{최소공배수} \end{array}$$

답 120

문제 3 다음 세 수의 최소공배수를 구하시오.

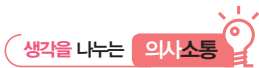
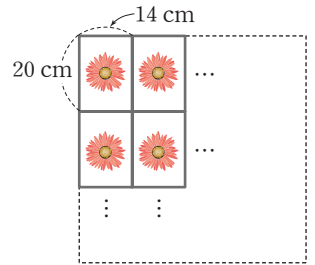
(1) $2^2 \times 3$, $2 \times 3 \times 5$, $3^2 \times 5^2$

(2) 2×3^2 , $2^2 \times 3 \times 5$, $2 \times 3^2 \times 7$

(3) 36, 48, 54

(4) 40, 56, 84

문제 4 한희는 가로 길이가 14 cm, 세로 길이가 20 cm인 직사각형 모양의 그림 카드를 빈틈없이 이어 붙여 정사각형을 만들려고 한다. 만들 수 있는 정사각형 중 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하시오.



서로소인 두 수의 최소공배수는 어떻게 구할지 이야기해 보자.



수학 집 짓기

24와 60의 최소공배수

$24 = 2^3 \times 3$
 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

최소공배수: $2^3 \times 3 \times 5 = 120$

지수가 다르면 큰 것 공통이 아닌 소인수
 지수가 같으면 그대로

모두 곱해!

$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$



스스로 해결하기

1

●○○○○

다음 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

두 개 이상의 자연수의 공배수는 그 수들의 의 배수이다.

2

●●○○○

다음 수들의 최소공배수를 구하시오.

- (1) $3^2 \times 11$, $2 \times 3 \times 11$
 (2) 20, 44
 (3) $2^2 \times 3$, $2^2 \times 3 \times 7$, $2 \times 3^2 \times 5 \times 7$
 (4) 24, 32, 60

3

●●○○○

두 수 $2^2 \times 3 \times 5^2$, 315의 최소공배수를 $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하시오.

4

●●●○○

세 수 4, 5, 6 중에서 하나의 수에 3을 곱하여 세 수의 최소공배수를 구하였더니 180이 되었다. 3을 어느 수에 곱하였는지 구하시오.

5

추론

●●●○○

다음 두 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수를 구하시오.

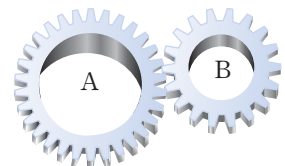
- (가) 18, 24로 모두 나누어떨어진다.
 (나) 세 자리의 자연수이다.

6

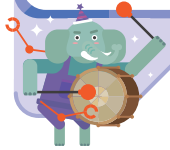
과정을 다지는 문제

●●●○○

오른쪽 그림과 같이 톱니가 각각 30개, 18개인 두 톱니바퀴 A, B가 맞물려 돌아가고 있다. 두 톱니바퀴가 어떤 톱니에서 맞물린 후 처음으로 다시 같은 톱니에서 맞물릴 때까지 A, B는 각각 몇 번 회전해야 하는지 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.



보물의 위치 찾기



- 다음 문제를 번호 순서대로 풀어 얻은 글자를 그 번호가 적힌 칸에 써넣으면 보물의 위치를 설명하는 문장이 만들어진다. 문제를 풀어 해적이 숨겨 놓은 보물의 위치를 찾아 보자.



번호	문제	답	글자
1	10 이하의 자연수 중에서 소수의 합을 구하시오.	2, 3, 5	포
2	$7 \times 7 \times 7 \times 7$ 을 거듭제곱을 사용하여 나타내시오.	14	쪽
3	5^4 의 밑과 지수를 차례대로 말하시오.	7^4	물
4	60의 소인수를 모두 구하시오.	12	위
5	132를 소인수분해하시오.	420	밑
6	42, 70의 최대공약수를 구하시오.	17	보
7	15, 24의 최소공배수를 구하시오.	$2^2 \times 3 \times 11$	북
8	48, 60, 72의 최대공약수를 구하시오.	6	에
9	3×5 , $2^2 \times 7$, $2 \times 5 \times 7$ 의 최소공배수를 구하시오.	120	바
10	10 이상 30 이하의 자연수 중에서 30과 서로소인 수의 개수를 구하시오.	5, 4	폭

1 2 은 3 4 의 5 6 에 있는

7 8 9 10 숨겨져 있다.



단원 마무리

01



다음 수 중에서 소수와 합성수가 각각 몇 개인지 구하시오.

1 2 7 9 15 17 21 29 34

02



다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르시오.

보기

- ㄱ. 두 소수의 합은 합성수이다.
- ㄴ. 한 자리 자연수 중에서 소수는 4개이다.
- ㄷ. 모든 합성수는 소수들의 곱으로 나타낼 수 있다.
- ㄹ. 소수이면서 합성수인 자연수가 있다.

03



다음 수를 거듭제곱을 사용하여 나타내시오.

- (1) $7 \times 7 \times 7 \times 13 \times 13$
- (2) $2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 5 \times 5 \times 3$

04



서로 다른 소인수가 세 개인 가장 작은 자연수를 구하시오.

05



270을 소인수분해하시오.

06



392를 소인수분해하였더니 $2^m \times 7^n$ 이 되었다. 이때 자연수 m, n 의 값을 각각 구하시오.

07

서술형



소인수분해를 이용하여 189의 약수를 모두 구하시오.

(단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

08



504를 자연수로 나눈 것이 어떤 자연수의 제곱이 될 때, 나눌 수 있는 가장 작은 자연수를 구하시오.

09



다음 두 수의 최대공약수와 최소공배수를 각각 구하시오.

- (1) $2^3 \times 7$, $2^2 \times 7^2$
- (2) 3×5^2 , $3^2 \times 5 \times 7$
- (3) 96, 108

10



다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르시오.

보기

- ㄱ. 14와 33은 서로소이다.
- ㄴ. 서로 다른 두 소수는 서로소이다.
- ㄷ. 두 짝수의 최대공약수는 2의 배수이다.
- ㄹ. 서로 다른 두 자연수의 최소공배수는 그 두 수의 곱과 같다.

11



어떤 두 자연수의 최대공약수가 520이다. 소인수분해를 이용하여 이 두 수의 공약수를 모두 구하시오.

12



두 수 84와 105를 어떤 자연수로 각각 나누면 모두 나누어떨어지고 그 몫이 서로소가 된다. 어떤 자연수를 구하시오.

13



600 이하의 자연수 중에서 두 수 42와 56의 공배수의 개수를 구하시오.

14



두 자연수 $3^a \times 7^2$, $3^2 \times b \times 7^c$ 의 최대공약수는 3×7 , 최소공배수는 $3^2 \times 5 \times 7^2$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하시오.

(단, b 는 소수이다.)

15



어느 시외버스 터미널에서 대전행 버스는 15분, 부산행 버스는 20분 간격으로 출발한다. 오전 9시에 두 도시로 가는 버스가 동시에 출발하였을 때, 그 후에 처음으로 다시 두 버스가 동시에 출발하는 시각을 구하시오.

16



세 자연수 20, 50, A 의 최대공약수는 10이고 최소공배수는 200일 때, A 가 될 수 있는 수를 모두 구하시오.

(단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

문제 해결

17



어느 가게에서 한 개에 1000원인 칫솔 45개와 한 개에 2000원인 치약 75개를 상자에 나누어 담아 묶음 상품으로 판매하려고 한다. 각 상자에 담긴 칫솔의 수와 치약의 수가 각각 같고, 최대한 많은 묶음 상품을 만든다고 할 때, 묶음 상품 1개의 가격을 구하시오. (단, 빈 상자의 가격은 생각하지 않는다.)

창의UP

18



다음 두 조건을 만족시키는 두 자연수의 합을 구하시오.

- (가) 두 자연수를 곱한 수의 약수는 2개뿐이다.
(나) 두 자연수의 차는 28이다.

자기 평가

점검 항목		도달 정도		
		미흡	보통	우수
학습 내용	소수와 합성수의 뜻을 아는가?			
	소인수분해의 뜻을 알고, 자연수를 소인수분해할 수 있는가?			
	최대공약수의 성질을 이해하고, 이를 구할 수 있는가?			
	최소공배수의 성질을 이해하고, 이를 구할 수 있는가?			
학습 태도	수업 시간에 성실히 참여하였는가?			
	문제를 풀 때 끈기 있게 도전하였는가?			
	복습과 예습을 꼼꼼히 하였는가?			
	친구의 의견을 존중하고 경청하였는가?			

● 이 단원을 공부하면서 알게 된 점과 어려웠던 점은 무엇인지 써 보자.

매미가 소수를 알까?

수학+과학

매미는 대부분의 생애를 땅속에서 유충으로 지내다가 땅 위로 나와 성충이 된 후, 한 달 정도 지내다 생을 마감한다. 북아메리카에는 13년이나 17년 동안의 긴 세월을 땅속에서 지내는 매미가 있는데, 이들은 각각 13년과 17년을 주기로 땅 위로 한꺼번에 올라온다고 한다.

이러한 매미는 출현 주기에 따라 각각 13년 매미, 17년 매미라고 부른다. 이때 13, 17은 모두 소수로서 마치 매미가 소수를 알고 있는 것처럼 보인다. 매미의 출현 주기가 소수인 이유는 매미의 천적이나 동족의 출현 주기와 관계가 있다고 한다. 이 관계를 생각해 보자.

[출처: E. R. Eaton · K. Kaufman, 『Kaufman Field Guide to Insects of North America』]

- 출현 주기가 각각 17년, 18년인 매미가 있다. 출현 주기가 각각 3년, 4년인 매미의 천적이 있다고 할 때, 매미와 천적이 만나는 주기를 계산하여 다음 표를 완성해 보자.

매미의 출현 주기	천적의 출현 주기	매미와 천적이 만나는 주기
17년	3년	
	4년	
18년	3년	
	4년	

- 서로 다른 두 종류의 매미의 출현 주기가 각각 다음과 같을 때, 두 종류의 매미가 만나는 주기를 계산해 보자.

- 13년, 17년
- 14년, 18년



과제

- 1과 2의 결과를 바탕으로 출현 주기가 소수인 매미와 소수가 아닌 매미 중 어느 매미가 생태계에서 살아남을 가능성이 더 높은지 생각해 보고, 자신의 의견을 말해 보자.

포트폴리오 평가

- 이 단원을 학습한 후 스스로 해결하기 및 단원 마무리 문제 해결, 자기 평가 작성, 창의+융합 프로젝트 과제 해결 등 모든 활동 결과를 확인하고 점검하였는가?